CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNÉE 1985

MATHÉMATIQUES PREMIERE EPREUVE A OPTION

(Durée : 3 h 00 - Coefficient : 9)

M - P

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES M - P

Les deux problèmes sont indépendants.

PREMIER PROBLEME

Dans ce problème $\mathcal{E}$ désigne l'espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si M est un point de $\mathcal{E}$, on désigne par x, y et z ses coordonnées dans le repère précédent. λ étant un réel strictement positif fixé, $(\mathcal{S})$ désigne la surface d'équation $z = \frac{xy}{\lambda}$, et pour tout réel a strictement positif, $(\mathcal{C}_a)$ désigne la courbe définie par :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \\ y = \frac{a}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \end{cases} \quad (\text{où } u \in \mathbb{R}^*) .$$

incluse dans la surface $(\mathcal{S})$.

I.1. Etablir les équations cartésiennes des projections de $(\mathcal{C}_a)$ sur le plan d'équation $z = 0$ et sur le plan d'équation $y = 0$. L'une de ces projections est une courbe classique. Donner ses éléments géométriques caractéristiques.

2. Si M est un point de $(\mathcal{C}_a)$, déterminer les intersections P et Q du plan tangent en M à $(\mathcal{S})$ avec l'axe O_x et avec l'axe O_y.

3. Montrer que la tangente en M à $(\mathcal{C}_a)$ rencontre la droite (PQ) en un point que l'on désignera par T.

4. Que peut-on dire des directions des droites (MT) et (PQ) ?

5. Montrer que toute courbe gauche (Γ) telle que pour tout M' de (Γ) la tangente en M' rencontre la droite P'Q', où P' est la projection de M' sur la droite O_x et où Q' est la projection de M' sur la droite O_y, vérifie nécessairement : $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$.

6. En déduire que toute courbe gauche (Γ) vérifiant les propriétés énoncées au 5. est portée par une surface dont l'équation est de la forme $z = mxy$, où m est une constante réelle.

7. Si a et a' sont des réels distincts, montrer que $(\mathcal{C}_a) \cap (\mathcal{C}_{a'}) = \emptyset$.

II. Si u est un réel non nul, M(u) désignera le point de $(\mathcal{C}_a)$ dont les coordonnées sont :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \\ y = \frac{a}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \\ z = \frac{1}{2}xy \end{cases}$$

On notera $\left\{M(u)\right\}_{u \in \mathbb{R}_+^*} = (\mathcal{C}_a^+)$ et $\left\{M(u)\right\}_{u \in \mathbb{R}_-^*} = (\mathcal{C}_a^-)$.

1. a) Soit (P) un plan, montrer que les valeurs de u ; notées u_1, u_2, u_3 et u_4, pour lesquelles $M(u) \in P \cap (\mathcal{C}_a)$ vérifient l'équation (E) suivante : $u_1.u_2.u_3.u_4 = -1$.

   b) Si u est une racine de multiplicité n de (E), le point M(u) sera dit de multiplicité n. Montrer que l'intersection $P \cap (\mathcal{C}_a)$ compte deux ou quatre points (comptés avec leurs multiplicités). Préciser les valeurs possibles de card $(P \cap \mathcal{C}_a^+)$ et card $(P \cap \mathcal{C}_a^-)$.

2. Montrer que, quel que soit le point M(u) de $(\mathcal{C}_a)$, le plan osculateur en M(u) recoupe $(\mathcal{C}_a)$ en un point M(u').
   On précisera la valeur de u' en fonction de u. On rappelle que le plan osculateur en M(u) à $(\mathcal{C}_a)$ correspond, pour u, à une racine triple de l'équation (E).

3. Soient $M(u_1)$, $M(u_2)$, $M(u_3)$, $M(u_4)$ quatre points coplanaires, montrer que les points $M(u'_1)$, $M(u'_2)$, $M(u'_3)$ et $M(u'_4)$ correspondants le sont aussi. On pourra montrer que si $M(u_1)$, $M(u_2)$, $M(u_3)$ et $M(u_4)$ sont des points tels que $u_1.u_2.u_3.u_4 = -1$, alors ils sont coplanaires.

4. On dira qu'un plan (P) est tangent à la courbe $(\mathcal{C}_a)$ en M(u) si u est une racine de multiplicité deux de l'équation (E) correspondant à $(P) \cap (\mathcal{C}_a)$.

Montrer que, si $M_1 \in (\mathcal{C}_a^+)$ et $M_2 \in (\mathcal{C}_a^-)$, il existe deux plans tangents (π_1) et (π_2) à $(\mathcal{C}_a)$ passant par M_1 et M_2.

DEUXIEME PROBLEME

Dans ce problème $M_2(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes, à coefficients complexes.

I. Si A et B sont deux matrices de $M_2(\mathbb{C})$, on désigne par ϕ l'application de $M_2(\mathbb{C})$ dans lui-même définie par :

$$\forall X \in M_2(\mathbb{C}) \quad , \quad \phi(X) = A X B .$$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{C})$.

2. a) Déterminer, en fonction des coefficients de A et B, la matrice associée à ϕ relativement à la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$, constituée par les matrices $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $E_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice sera désignée par $A \otimes B$.

b) Montrer que, si P, Q, A, B sont des matrices de $M_2(\mathbb{C})$, $(P \otimes Q)\ (A \otimes B) = (P\ A) \otimes (B\ Q)$.
